

基于一种新型趋近律的分数阶 Duffling 不确定系统的自适应滑模同步*

毛北行

(郑州航空工业管理学院理学院, 河南 郑州 450015)

摘要: 基于一种新型趋近律研究了分数阶不确定 Duffling 系统的自适应滑模同步控制问题, 利用自适应滑模方法设计了滑模函数和控制器, 得到了主从系统取得自适应滑模混沌同步的充分条件。结果表明: 选取适当的控制器以及滑模函数下, 主从系统取得滑模混沌同步, 给出了严格的推理过程和数学证明, 最后仿真算例表明该方法有效。

关键词: 分数阶 Duffling 系统; 自适应滑模; 混沌同步

中图分类号: O482.4 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579(2017)04-0064-04

Self-adaptive sliding mode synchronization of fractional-order uncertainty Duffling systems based on a new reaching law

MAO Beixing

(College of Science, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: The problem of self-adaptive sliding mode chaos synchronization of fractional-order uncertainty duffling systems based on a new reaching law is studied in the paper. The sliding mode functions and controllers are given out using self-adaptive sliding mode approach and got the sufficient conditions for the master-slave systems getting sliding mode synchronization. It is proved that master-slave systems are sliding model chaos synchronization under proper controllers and sliding mode surface. The strict deduce and proof in mathematics are given out in the paper. Numerical simulations examples of chaotic system verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: fractional-order Duffling systems; self-adaptive sliding mode; chaos synchronization

Mandelbrot 曾指出在自然界中存在着大量的分数维^[1-2], 采用分数阶对系统进行建模能更好的揭示对象的行为和本质。1995 年, Oustaloup 并设计了第一代分数阶控制器, 研究和对比分析表明分数阶控制器有更好的鲁棒性等优点。分数阶滑模结合了分数阶微积分和滑模控制的双重优点, 成为非线性控制的重要方法, 并在各个领域也得到了广泛应用^[3-9]。文献 [10] 设计了一类分数阶不确定动

力系统的终端滑模控制问题, 文献 [11] 研究了一类不确定系统的自适应滑模终端混沌同步控制问题。本文基于一种新型趋近律研究了分数阶不确定 Duffling 系统的自适应滑模同步控制问题, 得到了主从系统取得自适应滑模混沌同步的充分条件。结果表明: 选取适当的控制器以及滑模函数下, 主从系同能取得滑模混沌同步。仿真算例表明该方法有效。

* 收稿日期: 2017-03-11

基金项目: 国家自然科学基金青年基金 (NSFC11501525); 河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目 (2013GGJS-142)

作者简介: 毛北行 (1976 年生), 男; 研究方向: 复杂网络与混沌同步; E-mail: bxmao329@163.com

1 滑模趋近律的设计

利用新型幂次函数 $\text{fal}(x, \beta, \delta)$ [12] 设计趋近律, 函数定义如下:

$$\text{fal}(x, \beta, \delta) = \begin{cases} |x|^\beta \text{sign}(x), & |x| > \delta \\ \frac{x}{\delta^{1-\beta}}, & |x| < \delta \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\beta > 0$, 表示幂次函数的指数, $0 < \delta < 1$, δ 为 $\text{fal}(x, \beta, \delta)$ 在原点附近正负对称线段的区间长度, 由定义 1 可知, 当 x 的绝对值小于设定的 δ 时, x 的增益 $\delta^{\beta-1}$ 较大, 反之, 增益较小。本文设计如下新型滑模趋近律:

$$\dot{s} = -\varepsilon \text{fal}(s, \beta, \delta) - k \text{arsh}(s) \quad (2)$$

其中 s 为滑模函数, $\varepsilon > 0$, 代表趋近律收敛的速率, $k > 0$, $\text{arsh}(\cdot)$ 为反双曲正弦函数。当 $|s| \leq \delta$ (即 s 接近于零) 时, $\varepsilon \text{fal}(s, \beta, \delta)$ 项可使趋近速度增大, 从而保证系统状态达到滑模面; 在原点附近, $\text{fal}(s, \beta, \delta)$ 可有效减弱控制输入的高频震颤, $\text{arsh}(\cdot)$ 项能够让状态以较大速率趋近滑动模式; 同时, $\text{arsh}(s)$ 可起到平滑和限幅作用, 使 $k \text{arsh}(s)$ 不至于太大, 以达到降低输入信号的幅值的效果。

2 系统描述与预备知识

定义 1 Caputo 分数阶导数定义为 [13]

$$D_{t_0, t}^\alpha = D_{t_0, t}^{-(n-a)} \frac{d^n}{dt^n} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-a)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-a-1} x^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \in \mathbf{Z}^+$$

考虑分数阶 Duffling 混沌系统:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x_1 = -x_2, \\ D_t^\alpha x_2 = -ax_1 - bx_2 - x_1^3 + c \cos(\omega t) \end{cases} \quad (3)$$

式中, a, b, c 均为系统参数, ω 表示余弦函数的频率幅值。当 $a = -1, b = 0.25, c = 0.5, \alpha = 0.873$ 时出现混沌吸引子。以上述系统作为主系统, 设计从系统为如下系统:

$$\begin{cases} D_t^\alpha y_1 = y_2 \\ D_t^\alpha y_2 = -\hat{a}y_1 - \hat{b}y_2 - y_1^3 + c \cos(\omega t) + \Delta f(y) + d(t) + u(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\Delta f(y)$ 为不确定项, $d(t)$ 为有界的外部扰动, \hat{a}, \hat{b} 分别为对参数 a, b 的估计值, u 为控制器。定义误差 $e_i = y_i - x_i (i = 1, 2)$, 则误差系统为

$$\begin{cases} D_t^\alpha e_1 = e_2 \\ D_t^\alpha e_2 = -\hat{a}y_1 + ax_1 + bx_2 - \hat{b}y_2 - y_1^3 + x_1^3 + \Delta f(y) + d(t) + u(t) \end{cases} \quad (5)$$

假设 1 $\Delta f(y) + d(t) = g(t), |g(t)| < l, l$ 为正常数。

说明 双曲正弦函数的反函数为

$$\text{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

引理 1 对任意的 x 均有, 函数

$$h(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \geq 0$$

证明 $h'(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

以下分情况讨论: $x \geq 0$ 时, $h(x) \geq 0$ 显然成立。

当 $x < 0$ 时,

$$h'(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

由于 $\sqrt{x^2 + 1} - x > 1$, 所以 $\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} < 0$ 。而

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0, \text{ 所以}$$

$$h'(x) < 0$$

由函数的单调性不难得到在 $(-\infty, 0]$ 上 $h(x)$ 递减, 从而

$$h(x) > h(0) = 0$$

引理 2 [14] (Barbalat 引理) 若函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 并且广义积分 $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ 存在, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

3 主要结果

定理 1 在假设 1 下, 设计控制器

$$u(t) = y_1^3 - x_1^3 + ae_1 - \varepsilon \text{fal}(s, \beta, \delta) - k \text{arsh}(s)$$

设计适应律 $\dot{\hat{a}} = \gamma y_1 s, \dot{\hat{b}} = \gamma y_2 s$, 滑模函数 $s = D_t^{\alpha-1}(be_1 + e_2)$, 采用滑模新型趋近律

$$\dot{s} = -\varepsilon \text{fal}(s, \beta, \delta) - k \text{arsh}(s), \text{ 则系统 (3) 与 (4) 是滑模混沌同步的。}$$

证明 在滑模面上运动时, 必然满足 $s = 0, \dot{s} = 0$, 由

$$s = D_t^{\alpha-1}(be_1 + e_2) = 0 \Rightarrow$$

$$D_t^{1-\alpha} D_t^{\alpha-1}(be_1 + e_2) = be_1 + e_2 = 0$$

由于

$$D_t^\alpha e_1 = e_2 \Rightarrow D_t^\alpha e_1 = -be_1$$

从而根据分数阶微积分理论, 不难得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t)$

$= 0$ 。 $e_2 = -be_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0$, 当系统状态不在滑模面上运动时, 构造 Lyapunov 函数 $V(t) = \frac{1}{2}s^2 +$

$\frac{1}{2\gamma}(\hat{a} - a)^2 + \frac{1}{2\gamma}(\hat{b} - b)^2$, 上式求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} + \frac{1}{\gamma}(\hat{a} - a)\dot{\hat{a}} + \frac{1}{\gamma}(\hat{b} - b)\dot{\hat{b}} = \\ & sD_t^\alpha(be_1 + e_2) + s(\hat{a} - a)y_1 + s(\hat{b} - b)y_2 = \\ & s[be_2 - \hat{a}y_1 + ax_1 + bx_2 - \hat{b}_2y_2 - y_1^3 + x_1^3 + \\ & \quad \Delta f(y) + d(t) + u(t)] + \\ & s(\hat{a} - a)y_1 + s(\hat{b} - b)y_2 = \\ & s[be_2 - b(y_2 - x_2) - (\hat{b} - b)y_2 - (\hat{a} - a)y_1 - \\ & \quad a(y_1 - x_1) - y_1^3 + x_1^3 + u + \Delta f(y) + d(t)] + \\ & s(\hat{a} - a)y_1 + s(\hat{b} - b)y_2 = \\ & -\varepsilon s \cdot \text{fal}(s, \beta, \delta) - ks \cdot \text{arsh}(s) + g(t)s \leq \\ & -\varepsilon s \cdot \text{fal}(s, \beta, \delta) - ks \cdot \text{arsh}(s) + l|s| < 0 \end{aligned}$$

因 $\varepsilon > 0, k > 0, s \neq 0$ 时, 由函数 $\text{fal}(s, \beta, \delta)$ 和引理 1 不难得到, $\varepsilon \text{fal}(s, \beta, \delta) > 0$, 并且 $k \text{arsh}(s) > 0$, 函数 $\text{fal}(s, \beta, \delta)$ 对自变量 s 有显著放大作用,

只要选取适当的 ε, k , 总能使 $\dot{V} < 0$ 。而

$$\begin{aligned} \ddot{V} &= -\varepsilon \dot{s} \cdot \text{fal}(s, \beta, \delta) - \varepsilon s \text{fal}(s, \beta, \delta)' \\ & - ks \cdot \text{arsh}(s) - k \text{arsh}(s)' + \dot{g}(t) \cdot s + g(t) \dot{s} \end{aligned}$$

由于 s 有界, 由趋近律 $\dot{s} = -\varepsilon \text{fal}(s, \beta, \delta) - k \text{arsh}(s)$ 可知 \dot{s} 有界, 并且其余个函数均有界, 故 \ddot{V} 有界, 则 \dot{V} 一致连续, 根据 Barbalat 引理, 不难得到 $t \rightarrow \infty$ 时, $s \rightarrow 0$ 。

作为分数阶 Duffling 系统的特例, 以下考虑整数阶 Duffling 混沌系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = -ax_1 - bx_2 - x_1^3 + c \cos(\omega t) \end{cases} \quad (6)$$

以上述系统作为主系统, 设计从系统为如下系统:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\hat{a}y_1 - \hat{b}y_2 - y_1^3 + c \cos(\omega t) + \\ \quad \Delta f(y) + d(t) + u(t) \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\Delta f(y)$ 为不确定项, $d(t)$ 为有界的外部扰动, \hat{a}, \hat{b} 分别为对参数 a, b 的估计值, u 为控制器。定义误差 $e_i = y_i - x_i (i = 1, 2)$, 则误差系统为:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\hat{a}y_1 + ax_1 + bx_2 - \hat{b}_2y_2 - \\ \quad y_1^3 + x_1^3 + \Delta f(y) + d(t) + u(t) \end{cases} \quad (8)$$

因此不难将定理 1 在特殊情形下的结论平推, 得到如下推论:

推论 1 在假设 1 下, 设计控制器

$$u(t) = y_1^3 - x_1^3 + ae_1 - \varepsilon \text{fal}(s, \beta, \delta) - k \text{arsh}(s)$$

设计适应律 $\dot{\hat{a}} = \gamma y_1 s, \dot{\hat{b}} = \gamma y_2 s$, 滑模函数 $s = be_1 + e_2$, 采用滑模新型趋近律 $\dot{s} = -\varepsilon \text{fal}(s, \beta, \delta) - k \text{arsh}(s)$, 则系统 (6) 与 (7) 是滑模混沌同步的。

证明 在滑模面上运动时, 必然满足 $s = 0, \dot{s} = 0$, 由 $s = be_1 + e_2 = 0 \Rightarrow e_2 = -be_1$ 。由于 $\dot{e}_1 = e_2 \Rightarrow \dot{e}_1 = -be_1$, 从而根据 Lyapunov 稳定性理论, 不难得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0, e_2 = -be_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0$, 当系统状态不在滑模面上运动时, 构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2\gamma}(\hat{a} - a)^2 + \frac{1}{2\gamma}(\hat{b} - b)^2$$

上式求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} + \frac{1}{\gamma}(\hat{a} - a)\dot{\hat{a}} + \frac{1}{\gamma}(\hat{b} - b)\dot{\hat{b}} = \\ & s(b\dot{e}_1 + \dot{e}_2) + s(\hat{a} - a)y_1 + s(\hat{b} - b)y_2 = \\ & s[be_2 - \hat{a}y_1 + ax_1 + bx_2 - \hat{b}_2y_2 - y_1^3 + x_1^3 + \\ & \quad \Delta f(y) + d(t) + u(t)] + \\ & s(\hat{a} - a)y_1 + s(\hat{b} - b)y_2 = \\ & s[be_2 - b(y_2 - x_2) - (\hat{b} - b)y_2 - (\hat{a} - a)y_1 - \\ & \quad a(y_1 - x_1) - y_1^3 + x_1^3 + u + \Delta f(y) + d(t)] \\ & \quad + s(\hat{a} - a)y_1 + s(\hat{b} - b)y_2 = \\ & -\varepsilon s \cdot \text{fal}(s, \beta, \delta) - ks \cdot \text{arsh}(s) + g(t)s \leq \\ & -\varepsilon s \cdot \text{fal}(s, \beta, \delta) - ks \cdot \text{arsh}(s) + l|s| < 0 \end{aligned}$$

以下证明部分同定理 1, 略。

4 数值仿真

利用龙格库塔法进行数值仿真, 系统参数 $a = -1, b = 0.25, c = 0.5, \omega = 1, \alpha = 0.873$ 定理 1 中选取

$$\begin{aligned} \Delta f &= -0.05 \sin y_1, d(t) = 0.2 \cos t, \\ \beta &= 0.5, \delta = 0.02, \gamma = 15, \varepsilon = 15 \end{aligned}$$

系统初始值设置为:

$$\begin{aligned} (x_1(0), x_2(0)) &= (0.1, 0.2), \\ (y_1(0), y_2(0)) &= (0.5, -0.6), \\ \hat{a} &= -0.8, \hat{b} = 0.4 \end{aligned}$$

$u(t) = y_1^3 - x_1^3 + ae_1 - \varepsilon \text{fal}(s, \beta, \delta) - k \text{arsh}(s)$ 选取滑模面 $s(t) = D_t^{\alpha-1}(be_1 + e_2)$, 采用滑模新型趋近律 $\dot{s} = -\varepsilon \text{fal}(s, \beta, \delta) - k \text{arsh}(s)$, 该趋近律收敛速度较快, 其系统误差曲线如图 1 所示。

5 结论

文中基于 Lyapunov 稳定性理论和分数阶微积

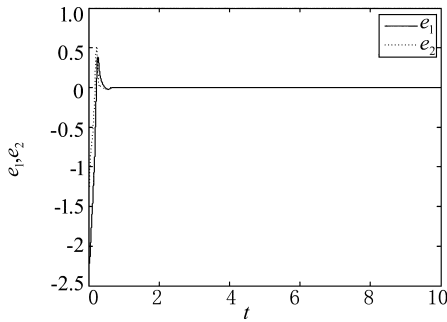


图 1 定理 1 中系统的误差曲线

Fig. 1 The systems errors of theorem1

分利用自适应滑模方法研究了分数阶 Duffling 系统的一种新型趋近律的自适应滑模同步问题, 研究表明: 设计适当的滑模函数和控制器可以实现主从系统滑模混沌同步。同时, 仿真算例也表明了方法的有效性。

参考文献:

- [1] MANDELBROT B B, van NESS J W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications[J]. Siam Review, 1968, 10(4): 422 - 437.
- [2] MANDELBROT B B, The fractal geometry of nature [M]. New York: W. H. Freeman & Co Ltd, 1974.
- [3] SHAHIRI M, GHADRI R, RANJBARN, et al. Chaotic fractional-order coulletsystem; synchronization and control approach[J]. Commun Nonlinear Sci Numerical Simulation, 2010, 15(3): 665 - 674.
- [4] HAMAMCI S E, KOLKSAL M. Calculation of all stabilizing fractional-order PD controllers for integrating time delay systems[J]. Computation Mathematics Application, 2010, 15(4): 1267 - 1278.
- [5] MATOUK A. Chaos feedback and synchronization of fractional-order modified autonomous Van der pol-Duffling circuit[J]. Commun Nonlinear Sci Numerical Simulation, 2011, 16(2): 975 - 986.
- [6] 丁金凤, 张毅. 基于按指数律拓展的分数阶积分的 El-Nabulsi-Pfaff 变分问题的 Noether 对称性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2014, 54(6): 150 - 154.

- DING Jinfeng, ZHANG Yi. Neother symmetries for El-Nabulsi-Pfaff variational problem for extended exponential fractional integral[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2014, 53(6): 150 - 154.
- [7] MOHADESZADEH M, DELAVARI H. Synchro-nization of fractional order hyper-chaotic systems based on a new adaptive sliding mode control[J]. Int J Dynam Control, 2015, 10(7): 435 - 446.
- [8] DELAVARI H, GHADERI R, RANJBAR A, et al. Fuzzy fractional order sliding mode controller for nonlinear systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(4): 963 - 978.
- [9] 毛北行, 李巧利. 一类分数阶 Genesio-Tesi 系统的滑模混沌同步[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2017, 56(2): 76 - 79.
- MAO Beixing, LI Qiaoli. Sling mode chaos synchronization of a class of fractional order Genesio-Tesi systems [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatse-ni, 2017, 56(2): 76 - 79.
- [10] DADRAS S, MOMENI H R. Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(1): 367 - 377.
- [11] 徐瑞萍, 高明美. 自适应终端滑模控制不确定混沌系统的同步[J]. 控制工程, 2016, 23(5): 715 - 719.
- XU Ruiping, GAO Mingmei. Synchronization of chaotic susyems with uncertainty using adaptive terminal sliding mode controller [J]. Control Engineering of China, 2016, 23(5): 715 - 719.
- [12] 周涛. 基于一种新型趋近律的自适应滑模控制[J]. 控制与决策, 2016, 31(7): 1335 - 1338.
- ZHOU Tao. Adaptive sliding control based on a new reaching law[J]. Control and Decision, 2016, 31(7): 1335 - 1338.
- [13] PODLUBN Y. Fractional differential equation[M]. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1999: 715 - 719.
- [14] 梅生伟, 申铁龙, 刘志康. 现代鲁棒控制理论与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.